Chaîne de désintégrations et équation de Bateman

Novembre 2012

Résumé

Nous proposons ici une démonstration de l'équation de Bateman s'appliquant à une chaîne de désintégration à n corps, en s'appuyant notamment sur l'étude préliminaire d'un exemple restreint, ainsi qu'une brève étude des conséquences de cette équation, et ce plus particulièrement dans le cas d'une chaîne comportant une espèce beaucoup moins radioactive que les autres.

1 Etude d'une filiation à 3 corps radioactifs

Avant d'étudier le cas à n filiations, étudions le cas de 4 corps A, B, C, D où A, B, C sont radioactifs et D est stable, suivant les réactions de désintégration :

$$A \xrightarrow{\lambda_A} B \xrightarrow{\lambda_B} C \xrightarrow{\lambda_C} D \tag{1.1}$$

Nous considérerons un échantillon exclusivement composé de N_0 noyaux A à $t = 0$. Voyons si la résolution de ce cas particulier peut nous amener à la solution générale du problème :

Nous parvenons au système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dN_A}{dt} = -\lambda_A N_A \\ \dfrac{dN_B}{dt} = +\lambda_A N_A - \lambda_B N_B \\ \dfrac{dN_C}{dt} = +\lambda_B N_B - \lambda_C N_C \\ \dfrac{dN_D}{dt} = +\lambda_C N_C \end{cases} \tag{1.2}$$

Nous pouvons résoudre directement la loi de décroissance radioactive suivie par A :

$$N_A(t) = N_0.e^{-\lambda_A t} \tag{1.3}$$

Puis nous injectons ceci dans le système (1.2) pour en déduire une équation différentielle en $N_B(t)$.

$$\frac{dN_B}{dt} + \lambda_B N_B = \lambda_A N_0.e^{-\lambda_A t} \tag{1.4}$$

On en déduit de nouveau la forme de la solution :

$$N_B(t) = Ke^{-\lambda_B.t} + \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_0.e^{-\lambda_A.t} \tag{1.5}$$

Cette fois, $N_B(0) = 0$ d'où :

$$N_B(t) = \lambda_A N_0. \left[\frac{e^{-\lambda_A.t}}{\lambda_B - \lambda_A} + \frac{e^{-\lambda_B.t}}{\lambda_A - \lambda_B} \right] \tag{1.6}$$

L'expression de $N_B(t)$ ne nous permet apparemment pas de conjecturer une expression générale de $N_n(t)$. Nous pouvons alors poser notre équation différentielle en $N_C(t)$, et la résoudre :

$$\frac{dN_C}{dt} + \lambda_C N_C = \lambda_A \lambda_B N_0. \left[\frac{e^{-\lambda_A.t}}{\lambda_B - \lambda_A} + \frac{e^{-\lambda_B.t}}{\lambda_A - \lambda_B} \right] \tag{1.7}$$

La solution est donc de la forme :

$$N_C(t) = Ke^{-\lambda_C.t} + \lambda_A \lambda_B N_0 \left[\frac{e^{-\lambda_A.t}}{(\lambda_B - \lambda_A)(\lambda_C - \lambda_A)} + \frac{e^{-\lambda_B.t}}{(\lambda_A - \lambda_B)(\lambda_C - \lambda_B)} \right] \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} N_C(t) &= \frac{\lambda_A \lambda_B}{(\lambda_C - \lambda_A)(\lambda_C - \lambda_B)} N_0 e^{-\lambda_C.t} + \lambda_A \lambda_B N_0 \left[\frac{e^{-\lambda_A.t}}{(\lambda_B - \lambda_A)(\lambda_C - \lambda_A)} + \frac{e^{-\lambda_B.t}}{(\lambda_A - \lambda_B)(\lambda_C - \lambda_B)} \right] \\ &= \lambda_A \lambda_B N_0 \left[\frac{e^{-\lambda_C.t}}{(\lambda_A - \lambda_C)(\lambda_B - \lambda_C)} + \frac{e^{-\lambda_A.t}}{(\lambda_B - \lambda_A)(\lambda_C - \lambda_A)} + \frac{e^{-\lambda_B.t}}{(\lambda_A - \lambda_B)(\lambda_C - \lambda_B)} \right] \end{aligned} \tag{1.9}$$

Cette expression semble plus propice à une généralisation.

2 Généralisation

2.1 Conjecture

Soit une filiation radioactive de la forme :

$$X_0 \overset{\lambda_0}{\rightarrow} X_1 \overset{\lambda_1}{\rightarrow} ... \overset{\lambda_{n-1}}{\rightarrow} X_n \overset{\lambda_n}{\rightarrow} X_{n+1} \overset{\lambda_{n+1}}{\rightarrow} ... \tag{2.1}$$

La forme de (1.9) nous permet d'intuiter une expression générale de la solution concernant le n-ième élément radioactif :

$$N_n(t) = N_0 \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{e^{-\lambda_i.t}}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (\lambda_j - \lambda_i)} \right] . \prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i \tag{2.2}$$

Si le n-ième élément est cette fois stable, nous pouvons bien sur intégrer simplement $\lambda_{n-1}.N_{n-1}(t)dt$. Mais surtout, nous pouvons remarquer que si n est stable, $\lambda_n = 0$. Donc, notre expression est valable que l'élément n soit stable ou non.

2.2 Démonstration

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété « (2.2) est vraie ». Montrons par récurrence qu'elle est vraie quel que soit n.

Bien sûr $\mathcal{P}_0$ est vraie (de même pour $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$) car ce sont leurs expressions qui nous on permis de prévoir la forme de N_n.

Supposons $\mathcal{P}_k$ vraie pour $k \in \mathbb{N}$ donné. Alors nous obtenons l'équation différentielle régissant $N_{k+1}(t)$:

$$\frac{dN_{k+1}}{dt} + \lambda_{k+1}N_{k+1} = N_0 \sum_{i=0}^{k} \left[\frac{e^{-\lambda_i . t}}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k} (\lambda_j - \lambda_i)} \right] . \prod_{i=0}^{k} \lambda_i \tag{2.3}$$

Nous détaillerons ici davantage la résolution de cette équation. Premièrement la solution de l'équation homogène associée a pour forme :

$$t \mapsto Ke^{-\lambda_{k+1}.t}, K \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

Déterminons une solution particulière f de l'équation différentielle par la méthode de variation de la constante, telle que $f(t) = \alpha(t).e^{-\lambda_{k+1}.t}$, où α est une primitive de α' vérifiant :

$$\alpha'(t) = N_0 \left[\sum_{i=0}^{k} \frac{e^{(\lambda_{k+1} - \lambda_i).t'}}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k} (\lambda_j - \lambda_i)} \right] . \prod_{i=0}^{k} \lambda_i \tag{2.5}$$

Alors f vérifie :

$$f(t) = N_0 \left[\sum_{i=0}^{k} \frac{e^{-\lambda_i . t}}{(\lambda_{k+1} - \lambda_i) \prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k} (\lambda_j - \lambda_i)} \right] . \prod_{i=0}^{k} \lambda_i = N_0 \left[\sum_{i=0}^{k} \frac{e^{-\lambda_i . t}}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k+1} (\lambda_j - \lambda_i)} \right] . \prod_{i=0}^{k} \lambda_i \tag{2.6}$$

D'où la forme de $N_{k+1}(t)$:

$$N_{k+1}(t) = Ke^{-\lambda_{k+1}.t} + N_0 \left[\sum_{i=0}^{k} \frac{e^{-\lambda_i . t}}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k+1} (\lambda_j - \lambda_i)} \right] . \prod_{i=0}^{k} \lambda_i \tag{2.7}$$

Puisque $N_{k+1}(0) = 0$:

$$K = -N_0 \sum_{i=0}^{k} \left[\frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k+1} (\lambda_j - \lambda_i)} \right] . \prod_{i=0}^{k} \lambda_i \tag{2.8}$$

Nous pouvons injecter ce résultat dans notre équation :

$$N_{k+1}(t) = N_0 \left[\sum_{i=0}^{k} \frac{e^{-\lambda_i . t} - e^{-\lambda_{k+1} . t}}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k+1} (\lambda_j - \lambda_i)} \right] . \prod_{i=0}^{k} \lambda_i = N_0 \left[\sum_{i=0}^{k+1} \frac{e^{-\lambda_i . t} - e^{-\lambda_{k+1} . t}}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k+1} (\lambda_j - \lambda_i)} \right] . \prod_{i=0}^{k} \lambda_i \tag{2.9}$$

Nous avons borné la somme à $k+1$ plutôt que k pour nous rapprocher de la forme souhaitée, en utilisant le fait que le $k+1$-ième terme de la somme est forcément nul. Remarquons également que la somme suivante est nulle :

$$\sum_{i=0}^{k+1} \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k+1} (\lambda_j - \lambda_i)} = 0 \tag{2.10}$$

En effet, considérons la somme suivante :

$$L(x) = \sum_{i=0}^{k+1} \frac{(x - \lambda_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k+1} (\lambda_i - \lambda_j)} \tag{2.11}$$

Il s'agit du polynôme de Lagrange [1] $L(x)$ satisfaisant $L(\lambda_i) = 1$. Le terme de plus haut degré d'un tel polynôme est de degré $k+1$. Nous avons alors, par unicité de ce polynôme, $L(x) = 1$. De plus, en séparant les termes en x^{k+1} d'une part, et les termes de degré strictement inférieur d'autre part dans $l(x)$ nous avons :

$$L(x) = x^{k+1} \sum_{i=0}^{k+1} \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k+1} (\lambda_i - \lambda_j)} + l(x) \tag{2.12}$$

Alors nous avons bien, par identification de polynômes :

$$\sum_{i=0}^{k+1} \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k+1} (\lambda_j - \lambda_i)} = 0 \tag{2.13}$$

1. Merci à Arkin pour l'idée d'utiliser l'interpolation de Lagrange.

Dès lors nous obtenons pour $N_{k+1}(t)$:

$$N_{k+1}(t) = N_0 \left[\sum_{i=0}^{k+1} \frac{e^{-\lambda_i . t}}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{k+1} (\lambda_j - \lambda_i)} - \sum_{i=0}^{k+1} \frac{e^{-\lambda_{k+1} . t}}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{k+1} (\lambda_j - \lambda_i)} \right] . \prod_{i=0}^{k} \lambda_i = N_0 \sum_{i=0}^{k+1} \left[\frac{e^{-\lambda_i . t}}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{k+1} (\lambda_j - \lambda_i)} \right] . \prod_{i=0}^{k} \lambda_i \tag{2.14}$$

Il apparait que $\mathcal{P}_k$ vraie $\Rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$ vraie. Ainsi, $\mathcal{P}_0$ étant vrai, on a bien :

$$N_n(t) = N_0 \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{e^{-\lambda_i . t}}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (\lambda_j - \lambda_i)} \right] . \prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i \tag{2.15}$$

3 Remarques

3.1 Cas limite : espèce cinétiquement déterminante

Le résultat apparait comme une somme pondérées des décroissances radioactives de chaque élément supposé seul et en quantité N_0 à $t = 0$. Il apparait également que plus une constante radioactive est faible, c'est-à-dire plus un élément est stable, plus son poids est important dans la loi de décroissance de tous les éléments qu'il engendre.

Supposons en effet qu'une constante de vitesse λ_k soit très inférieure aux autres. Autrement dit, supposons que $i \neq k \Rightarrow \lambda_i \gg \lambda_k$. On s'intéresse alors à la quantité du n-ième élément au cours du temps. D'après nos hypothèses :

$$\frac{e^{-\lambda_i t}}{e^{-\lambda_k t}} = e^{(\lambda_k - \lambda_i)t} \stackrel{t \to +\infty}{\to} 0 \tag{3.1}$$

Ce qui mène

$$\frac{e^{-\lambda_i t}}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (\lambda_j - \lambda_i)} \ll \frac{e^{-\lambda_k t}}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (\lambda_j - \lambda_k)} \tag{3.2}$$

Et finalement, nous aboutissons à l'expression approchée de N_n :

$$N_n(t) \simeq N_0 \frac{e^{-\lambda_k . t}}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (\lambda_j - \lambda_i)} . \prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i \approx N_0 \frac{\lambda_k}{\lambda_n} e^{-\lambda_k . t} \tag{3.3}$$

Notons que cette approximation est valable pour les 4 chaînes radioactives connues, puisque pour chacun d'elle il existe un élément possèdant une durée de vie beaucoup plus longue que les autres.

Remarquons aussi que dans ce cas, pour deux éléments successifs :

$$\frac{N_{n+1}(t)}{N_n(t)} \simeq \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_k} \approx \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \tag{3.4}$$

Par exemple, pour la chaine de désintégration issue de l'uranium 235, le Plomb 211 se désintègre en Bismuth 211 qui se désintégre en Thallium 207 :

$$\ldots \rightarrow \ {}^{211}\mathrm{Pb} \ \overset{\lambda_{Pb}}{\rightarrow} \ {}^{211}\mathrm{Bi} \ \overset{\lambda_{Bi}}{\rightarrow} \ {}^{207}\mathrm{Th} \ \rightarrow \ldots \tag{3.5}$$

Par calcul, en appliquant l'équation de Bateman exacte au Bismuth et au Plomb, on trouve :

$$\frac{\lambda_{Pb}}{\lambda_{Bi}} = \frac{N_{Bi}(+\infty)}{N_{Pb}(+\infty)} \approx 0,0596 \tag{3.6}$$

Expérimentalement, $\tau_{Bi} = 2,15$ min et $\tau_{Pb} = 36,1$ min, et donc : $\lambda_{Pb}/\lambda_{Bi} = \tau_{Bi}/\tau_{Pb} \approx 0,0596$. Les approximations sont donc complètement justifiées (et nos calculs corrects !)

3.2 Quantités initiales non nulles

Nous avons considéré, pour établir notre relation que seuls les noyaux fils, que seul le premier élément de la chaîne étant présent au départ. Cependant, nous pouvons prévoir sans calcul la façon dont le cas général peut être résolu, par application du principe de superposition. En effet, si par exemple, notre échantillon est constitué de N_0^0 noyaux de X_0 et N_1^0 noyaux de X_1 à $t = 0$, alors la solution pour les éléments $X_{n\geq 1}$ sera la somme des solutions pour $(N_0(0) = N_0^0, N_{n\neq 0}(0) = 0)$ et $(N_1(0) = N_1^0, N_{n\neq 1}(0) = 0)$. En fait, si N_i^0 est la quantité initiale de X_i à $t = 0$, la solution générale pour le n-ième élément est :

$$N_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \left[N_k^0 \sum_{i=k}^{n} \left(\frac{e^{-\lambda_i . t}}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (\lambda_j - \lambda_i)} \right) . \prod_{i=k}^{n-1} \lambda_i \right] \tag{3.7}$$

3.3 Activité

Nous n'avons considéré que l'évolution du nombre de noyaux de chaque élément au cours du temps, mais il est très facile d'en déduire l'activité radioactive partielle $A_n(t)$ d'un élément. C'est :

$$A_n(t) = N_0 \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{e^{-\lambda_i . t}}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (\lambda_j - \lambda_i)} \right] . \prod_{i=0}^{n} \lambda_i \tag{3.8}$$

Dans le cas de l'approximation de l'élément « cinétiquement déterminant », $A_n(t) \simeq A_k N_0 e^{-\lambda_k t}$. Autrement, l'activité de chaque espèce est égale à celle de l'espèce la plus stable.